Ітераційні методи типу Ньютона без обчислення оберненого оператора для розв'язування нелінійних рівнянь

УДК 519.6

Степан Шахно[1], Богдан Голуб[2], Юрій Шунькін[3], Михайло Гавдяк[4]

Львівський національний університет імені Івана Франка,
[1]stepan.shakhno@lnu.edu.ua, [2]bohdan.holub@lnu.edu.ua,
[3]yuriy.shunkin@lnu.edu.ua, [4]mykhailo.havdiak@lnu.edu.ua

Нехай задано нелінійне операторне рівняння

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

де оператор F визначений на опуклій множині D банахового простору X зі значеннями у просторі Y. Для цього рівняння необхідно знайти $x_* \in D$, для якого $F(x_*) = 0$. Задачі такого типу виникають при моделюванні систем та процесів у різних галузях науки та інженерії. Базовим методом для розв'язування (1) є метод Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1}F(x_n), \quad n = 0,1,2,\dots, \tag{2}$$

де $F'(x)^{-1}$ позначає обернений оператор до похідної Фреше $F'(x)$ оператора $F(x)$, x_0 – початкове наближення до розв'язку x_*.

Пошук оберненого оператора може бути важким завданням залежно від конкретної ситуації і властивостей. Його знаходження може потребувати значних обчислювальних затрат, особливо якщо розмірність простору велика або якщо оператор має складну структуру. Нелінійність також вводить додаткову складність у розв'язання рівнянь. Нами проведено дослідження ітераційного методу ньютонівського типу, який використовує суму операторів, що містять похідну Фреше $F'(x)$.

Нехай $\mathcal{L}(X,Y)$ – простір лінійних обмежених операторів. Нехай $M \in \mathcal{L}(X,Y)$ та існує обернений оператор для M та $(I - M^{-1}(M - F'(x)))$. Тоді із (2) отримуємо метод вигляду [1]:

$$x_{n+1} = x_n - \left[I - M^{-1}\left(M - F'(x_n)\right)\right]^{-1} M^{-1}F(x_n), \ \ n = 0,1,2,\dots \tag{3}$$

Далі замінимо $\left[I - M^{-1}\left(M - F'(x_n)\right)\right]^{-1}$ на суму операторів $I + A(x_n) + A^2(x_n) + \cdots + A^k(x_n)$, де k – натуральне число, $A = A(x_n) = M^{-1}\left(M - F'(x_n)\right)$. Отримаємо метод вигляду:

$$\begin{gathered} x_{n+1} = x_n - BM^{-1}F(x_n), \\ B = I + A + A^2 + \cdots + A^k, \end{gathered} \tag{4}$$

де x_0 – початкове наближення до розв'язку задачі (1), M- фіксований лінійний оператор. Метод (4) потребує лише одного обертання лінійного оператора M. У випадку, коли $M = F'(x_0)$, $k = 2$, отримуємо

$$\begin{aligned} &x_{n+1} = x_n - BM^{-1}F(x_n), \\ &A = M^{-1}\left(M - F'(x_n)\right), \\ &B = I + A + A^2. \end{aligned}$$

Для чисельного порівняння розглянемо також метод із послідовною апроксимацією оберненого оператора [2]

$$x_{n+1} = x_n - A_n F(x_n),$$
$$A_{n+1} = A_n[2I - F'(x_{n+1})A_n], \tag{5}$$

де A_0 – деяке початкове наближення до оператора A^{-1}, I – одиничний оператор. Проведемо порівняння запропонованого методу (4) із методами (2) та (5) на кількох тестових задачах. Обчислення проводилися, використовуючи 2.4 GHz 8-Core Intel i9.

Приклад 1. Broyden tridiagonal function

$$f_i(x) = (3 - 2x_i) - x_{i-1} - 2x_{i+1} + 1,$$
$$x_0 = x_{n+1} = 0.$$

Таблиця 1.

CPU- час та кількість ітерацій для досягнення розв'язку за заданої точності 10^{-13}

n	x_0	Метод (2)		Метод (4)		
		Час	Ітерацій	Час	Ітерацій	k
6	$(-1,\ldots,-$	0,03313	6	0,032342	6	8
6	$(-2,\ldots,-$	0,03971	7	0,052662	7	14
12	$(-2,\ldots,-$	0,068651	7	0,081608	7	22
30	(-7,…-7)	0,422025	9	0.529229	12	38
30	(-10,…-10)	0.249424	9	0,706828	16	36
100	$(-2,\ldots,-$	1,223344	7	1,855618	7	14

Час визначено як середнє значення зі 100 повторних виконань у секундах $\times 10^{-3}$. Метод (5) для даного прикладу розв'язку не знайшов.

Приклад 2. Brown almost-linear function

$$f_i(x) = x_i + \sum_{j=1}^{n} x_j - (n+1), \quad 1 \le i < n,$$

$$f_n(x) = \left(\prod_{j=1}^{n} x_j\right) - 1\,.$$

Таблиця 2

Кількість ітерацій для досягнення розв'язку за заданої точності 10^{-13}

x_0	Метод (2)	Метод (4)	$t_2\ /\ t_4$
$(3,-3,3,-3,3)$	9	11	1,317
$(-3,1,-3,-3,-3,0)$	10	43	1,117
$(1,1,-3,-3,1,0)$	9	11	1,178
$(1,1,-3,-3,1)$	7	8	0,832
$(1,1,-3,-3,1,-3)$	13	18	1,178
$(-3,-3,1,0)$	9	9	1.211

В табл. 2 t_2 – середній час виконання однієї ітерації за методом (2), t_4 –середній час виконання однієї ітерації за методом (4).

Метод (5) для цієї задачі розв'язку не знайшов. Час визначено як середнє значення зі 100 повторних виконань у секундах $\times 10^{-3}$. Із таблиці 2 видно, що метод (4) потребує менше часу для обчислення нового наближення до розв'язку, проте в залежності від задачі та обраного k може використовувати більшу кількість ітерацій у порівнянні з методом Ньютона.

Приклад 3.

$$f_1(x) = x - 0.1\sin x - 0.3\cos y + 0.4,$$
$$f_2(x) = y - 0.2\cos x + 0.1\sin y + 0.3.$$

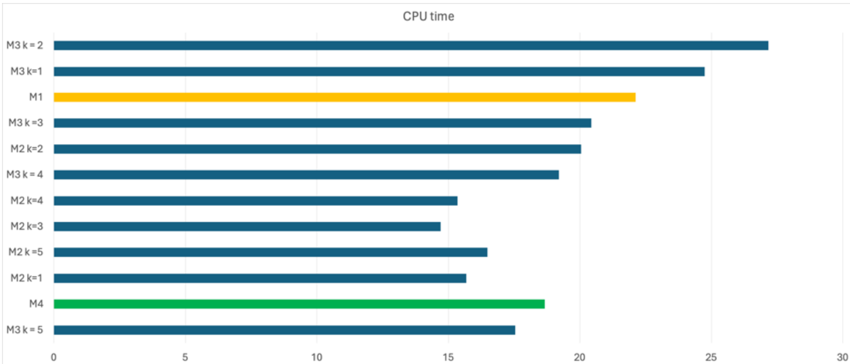

Рис. 1. CPU-час для отримання розв'язку з точністю 10^{-12} для прикладу 3

На рис.1 для методу Ньютона (2) використано жовтий колір, для методу (4) – синій колір та для методу (5) – зелений колір. Час визначено як середнє значення з 1000 повторних виконань у секундах $\times 10^{-6}$. M3 – метод (4) із використанням $M = I$, M2 – метод (4) із використанням $M = F'(x_0)$.

Для випадків із невеликим значенням k необхідно більше ітерацій для досягнення бажаної точності, що впливає на загальний час роботи методу.

Запропонована робота розв'язує проблему обчислення $F'(x_n)^{-1}$ на кожному кроці методу Ньютона. Обертання оператора замінено скінченною сумою лінійних операторів, які залежать від $F'(x)$. Також наведені обчислення показують, як зміни у запропонованому методі впливають на збіжність та швидкість обчислень для задач різної розмірності.

1. Argyros I.K., George S., Shakhno S., Regmi S., Havdiak M., Argyros M.I. Asymptotically Newton-Type Methods without Inverses for Solving Equations. -–*Mathematics* . – 2024. – 12, №. 7: 1069. https://doi.org/10.3390/math12071069
2. Ulm S.U. On iterative methods with successive approximation of the inverse operator. – *Izv. Acad. Nauk Est. SSR. Fiz. Mat*. – 1967. – 6, №. 4. – P. 403-411.